A

01. දිග $3a$ වූ AB දණ්ඩක් ගෝලයේ කේන්ද්‍රය හරහා වූ සිරස් තලයක තිරසට α කෝණයකින් ආනත ව සුමට ගෝලයක් තුළ තබා ඇත. දණ්ඩ මගින් ගෝලයේ කේන්ද්‍රයේ ආපාතනය කරනු ලබන කෝණය β වේ. ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය A සිට a දුරකින් පිහිටා ඇත්නම් $\tan\dfrac{\beta}{2} = 3\tan\alpha$ බව පෙන්වන්න.

02. අරය r වන සුමට අර්ධ ගෝලීය කෝප්පයක් තුළ r දිග ඇති බර AB දණ්ඩක් තබා ඇත. දණ්ඩේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G, $AG = \dfrac{1}{3}r$ වන පරිදි පිහිටයි. සිරස සමග දණ්ඩ සාදන කෝණය සොයන්න.

03. දිග $\sqrt{3}a$ වන W බර ඒකාකාර නොවන AB දණ්ඩක් තිරසට 30^0 කින් ආනත ව අරය a වූ සුමට ගෝලයක් තුළ සිරස් තලයක සමතුලිතව පවතී. A හා B හි දී ගෝලයෙන් දණ්ඩ මත ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. AB දණ්ඩ එහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙන් 1 : 2 අනුපාතයෙන් බෙදෙන බව පෙන්වන්න.

04. අරය r වන අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් එහි ගැට්ට තිරස් වන සේ සවිකර ඇත. ඒකාකාර නොවන AB දණ්ඩක G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය $AG = a$ සහ $GB = b$ වන සේ එහි B කෙළවර A කෙළවරට ඉහළින් පිහිටන සේ සමතුලිතව පවතී. දණ්ඩේ තිරසට ආනතිය θ නම්

$$\sin\theta = \frac{b - a}{2\sqrt{r^2 - ab}}$$ බව පෙන්වන්න.

05. අරය a වන සුමට අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක් අචලව සවිකර ඇත්තේ එහි ගැට්ට තිරස්ව සහ ඉහලින්ම පිහිටන අන්දමිනි. දිග $\dfrac{8a}{5}$ වන ඒකාකාර නොවූ බර දණ්ඩක් පාත්‍රය තුළට සම්පූර්ණයෙන්ම දමා සමතුලිත විට එය තිරස සමග 30^0 ක කෝණයක් සාදයි. දණ්ඩේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය මගින් දණ්ඩ බෙදාලනු ලබන අනුපාතය සොයන්න. දණ්ඩේ බර w නම් දණ්ඩ සඳහා බල ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ එය භාවිතා කරමින් ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයන්හි දී ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

06. අරය r වන සුමට අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක් අචලව සවිකර ඇත්තේ අක්ෂය සිරස්ව සහ ශීර්ෂය පහතින්ම පිහිටන අන්දමිනි. දිග $2a$ වන ඒකාකාර නොවූ බර දණ්ඩක් පාත්‍රය තුළට සම්පූර්ණයෙන්ම දමා ඇතිවිට එය සිරසට 60^0 කෝණයෙන් ආනතව සමතුලිතව පිහිටයි. ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය මගින් දණ්ඩ බෙදාලනු ලබන අනුපාතය $\dfrac{\sqrt{3}a - \sqrt{r^2 - a^2}}{\sqrt{3}a + \sqrt{r^2 - a^2}}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

07. දිග $3a$ වූ AB දණ්ඩක් සුමට ගෝලයක් තුල තබා තිරසට α ආනතියක් සහිත පිහිටීමක නිශ්චලතාවයෙහි ඇත. දණ්ඩ මගින් කේන්ද්‍රයේ ආපාතනය කරනු ලබන කෝණය β වේ. දණ්ඩේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය A සිට a දුරකින් පිහිටා ඇත්නම් $\beta = 2\tan^{-1}(3\tan\alpha)$ බව පෙන්වන්න.

08. ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයේදී එකට දෙක අනුපාතයට බෙදෙන දණ්ඩක් සුමට ගෝලයක් තුල සමතුලිතව තිබේ. ගෝලය කේන්ද්‍රයේ 90^0 ක කෝණයක් ආපාතනය වනසේ දණ්ඩ සිරස් තලයක පිහිටා ඇත්නම් $\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ කෝණයකින් දණ්ඩ තිරසට ආනත වන බව පෙන්වන්න.

09. ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙන් a හා b කොටස් දෙකකට බෙදෙන දණ්ඩක් සුමට ගෝලයක් තුළ තබා තිබේ. එය සමතුලිතතාවයෙන් තිබෙන විට තිරසට එහි ආනතිය θ ද දණ්ඩෙන් ගෝල කේන්ද්‍රයෙහි ආපාතනය කෙරෙන කෝණය 2α ද නම් $\tan\theta = \left(\frac{b-a}{b+a}\right)\tan\alpha$ බව පෙන්වන්න.

10. සුමට අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක් අචලව සවිකර ඇත්තේ ගැට්ට තිරස්ව සහ ඉහළින් ම පිහිටන අන්දමිනි. ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙන් $2a$ සහ a දිගැති කොටස් දෙකකට බෙදෙන බර සිහින් දණ්ඩක් පාත්‍රය තුලට සම්පූර්ණයෙන්ම දමා ඇත. සමතුලිත විට දණ්ඩ තිරසට $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{7}}{14}\right)$ කෝණයෙන් ආනතව පවතී නම් පාත්‍රයේ විෂ්කම්භය a ඇසුරින් සොයන්න.

B

11. අරය a වූ සුමට කුහර අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් එහි ගැටිය තිරස් වන ලෙස සවිකර ඇත. බර W වූ අංශුවක් B හි සවිකර ඇති බර 2W ද දිග l ද වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක් A පාත්‍රයෙහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ වන ලෙසද දණ්ඩෙහි ලක්ෂ්‍යයක් පාත්‍රයේ ගැටිය ස්පර්ශ වන ලෙසද නිශ්චලව පිහිටයි. දණ්ඩ තිරසත් සමග θ කෝණයක් සාදයි. $l = 3a\cos 2\theta\sec\theta$ බව පෙන්වන්න. දණ්ඩෙහි තිරසට ආනත කෝණය රේඩියන් $\frac{\pi}{6}$ ට නොවැඩි බව අපෝහනය කරන්න.

12. දෘඪ වස්තුවක් සියල්ලම සමාන්තර නොවූ ක්‍රියා රේඛාවක් සහිත ඒකතල බල තුනක ක්‍රියාව යටතේ සමතුලිතතාවේ පවතී නම් එවිට ඒවායේ ක්‍රියා රේඛා ඒක ලක්ෂ්‍යය විය යුතු බව පෙන්වන්න. අරය $\sqrt{3}a$ වන සුමට අර්ධ ගෝලාකාර අචල පාත්‍රයක ගැටිය උඩින් යන දිග $4a$ වන ඒකාකාර බර දණ්ඩක් එක් කෙළවරක් පාත්‍රයේ පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ කරමින් නිසලව ඇත. පාත්‍රයේ ගැටියේ තිරස්ව පිහිටයි නම්, තිරසට දණ්ඩේ ආනතිය රේඩියන් $\frac{\pi}{6}$ ක් බව පෙන්වන්න.

[1989 A/L]

Scanned with CamScanner

13. අරය a වූ සුමට අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් එහි අක්ෂය සිරස්වද ශීර්ෂය පහතින්ම ද පිහිටන සේ අචලව සවිකර ඇත. $3a$ දිගැති W බරැති ඒකාකාර දණ්ඩක් පාත්‍රය තුලට දමා ඇත්තේ එහි එක් කෙළවරක් පාත්‍රයේ ඇතුල් පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ කරමින් ද අනෙක් කෙළවර පාත්‍රයෙන් පිටතට නෙරා පවතිමින්ද පිහිටන අන්දමිනි. පාත්‍රයෙන් පිටත පිහිටන දඬු කොටසේ දිග

$\frac{a}{8}(21-\sqrt{137})$ බව පෙන්වන්න. දණ්ඩේ කෙළවරේ දී පාත්‍රය ඇතිකරන ප්‍රතික්‍රියාව R නම්,

$(73+3\sqrt{137})R^2 = (55-3\sqrt{137})W^2$ බව පෙන්වන්න.

14. අරය a වන සුමට තුනී අර්ධ ගෝලාකාර පාත්‍රයක් එහි ගැට්ය තිරස් ව සහ ඉහළින් ම පිහිටන පරිදි සවිකොට ඇත. බර W සහ දිග $2l\ (> 2a)$ වන සුමට ඒකාකාර AB දණ්ඩක් A කෙළවර පාත්‍රයේ ඇතුළත පෘෂ්ඨයේ පිහිටන පරිදි දණ්ඩේ C ලක්ෂ්‍යයක් පාත්‍රයේ ගැට්ය මත ගැටෙමින් නිසලව ඇත. දණ්ඩ මත ක්‍රියාකරන බල සටහන් කරන්න. A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන් C හි දී, R ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\frac{Wl}{2a}$ බව පෙන්වන්න.

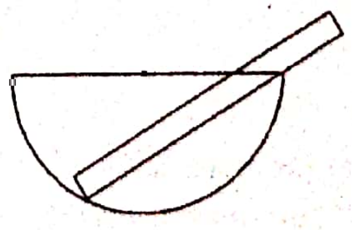
තවද, ලාමී ප්‍රමේයය භාවිතයෙන් R සහ W අතර තවත් සම්බන්ධතාවක් ලබාගන්න.

ඒ නයින්, CB හි දිග $\frac{1}{4}\left[7l-\sqrt{l^2+32a^2}\right]$ බව පෙන්වන්න.

15. අර්ධ විෂ්කම්භය a වන අර්ධ ගෝලාකාර සුමට පාත්‍රයක් එහි අක්ෂය සිරස්ව පිහිටනසේ දෘඪ ලෙස සවිකොට තිබේ. ඒකාකාර ACB දණ්ඩක A කෙළවර පාත්‍රය ඇතුළත වක්‍ර පෘෂ්ඨයේ ගැටෙමින් ද B කෙළවර පාත්‍ර ගැට්ටෙන් පිටතට නෙරා පිහිටමින් ද, සිටින සේ C ලක්ෂ්‍යය පාත්‍ර ගැට්ටේ ගැටෙමින් දණ්ඩ සමතුලිතව තිබේ. දණ්ඩ තිරසට 30^0 ක කෝණයකින් ආනතනම් දණ්ඩේ දිග $4\sqrt{3}a/3$ බව පෙන්වන්න. දණ්ඩේ බර W නම් A හා C ලක්ෂ්‍යවලදී දණ්ඩ මත ක්‍රියා කරන ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

16. අරය a වන සුමට අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් ගැට්ට තිරස්ව සහ ඉහලින්ම පිහිටන සේ අචලව සවිකර ඇත. දිග 2b ද ආධාරක අරය c ද වන බර W වන සෘජු වෘත්ත ඒකාකාර සිලින්ඩරයක් පාත්‍රය තුලට දමා ඇත්තේ එක් ආධාරකයක පරිධිය මත ලක්ෂ්‍යයක් පාත්‍රයේ ඇතුල් පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ කරමින් ද වක්‍ර පෘෂ්ඨය මත ලක්ෂ්‍යයක් පාත්‍ර ගැට්ට ස්පර්ශ කරමින් ද, සමතුලිත වන අන්දමිනි.

සිලින්ඩරයේ අක්ෂය තිරසට ආනත වන කෝණය θ නම් $2a\cos 2\theta = b\cos\theta - c\sin\theta$ බව පෙන්වන්න. $b > c.\tan\theta$ බව ද පෙන්වන්න.



සිලින්ඩරයේ ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යවලදී ප්‍රතික්‍රියා එක එකක්

$W\tan\theta$ සහ $W\frac{[b\cos\theta - c.\sin\theta]}{2a\cos\theta}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

17. අරය a වන සුමට අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක්, එහි ගැට්ට තිරස්ව සහ ඉහළින් පිහිටන සේ අචලව සවිකර ඇත. G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙන් AG : GB = 1 : 2 අනුපාතයට බෙදෙන දිග b වන බර w වන දන්ඩක් පාත්‍රය තුලට දමා ඇත්තේ A කෙළවර පාත්‍රයේ ඇතුල් පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ කරමින් ද B කෙළවර පාත්‍රයෙන් පිටතට නෙරා පවතිමින් ද, පිහිටන අන්දමිනි. B ලක්ෂ්‍යයෙන් $2w$ භාරයක් එල්ලා ඇත.

දණ්ඩ තිරසට θ කෝණයෙන් ආනත වන අතර A හිදී ප්‍රතික්‍රියාව, පාත්‍ර ගැට්ටේ ප්‍රතික්‍රියාව මෙන් දෙගුණයක් වේ නම්, $\tan\theta = \dfrac{7b}{9a}$ බව පෙන්වන්න.

18. අර්ධ විෂ්කම්භය a වූ සුමට අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් එහි ගැට්ටට තිරස් වන සේ සවිකර ඇත. බර 2W ද දිග l ද වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක් A පාත්‍රයෙහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ වන ලෙස ද දණ්ඩේ ලක්ෂ්‍යයත් ගැට්ට ස්පර්ශ වන ලෙස ද පවතී. B කෙළවරට W භාරයක් ඈඳා තිරස θ කෝණයකින් දණ්ඩ සමතුලිතව තබා ඇත. $l = 3a\cos 2\theta \sin\theta$ බව පෙන්වන්න.

(1974 A/L)

19. අර්ධ විෂ්කම්භය r වූ සුමට කුහර කපාගන්නා ලද අර්ධ ගෝලයක් ගැට්ට තිරස්ව පිහිටන සේ දෘඪ ලෙස සවිකොට ඇත. ඒකාකාර සිහින් බරැති දණ්ඩක් ගෝලයේ කේන්ද්‍රය හරහා යන සිරස් තලයක සමතුලිතව ඇත්තේ දණ්ඩේ කෙළවරක් අර්ධ ගෝලය ඇතුළත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක ගැටෙමින් ද අනෙක් කෙළවර ගැට්ටෙන් පිටතට නෙරා පිහිටීමෙන් ද තිබෙන සේය. දණ්ඩේ දිග l ද, තිරසට ආනත කෝණය θ ද නම්, $l\cos\theta = 4r\cos 2\theta$ බව ද $4r > l > \dfrac{2\sqrt{6}r}{3}$ පෙන්වන්න.

20. අරය a වන සුමට අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක් ගැට්ට තිරස්ව සහ ඉහළින්ම පිහිටන සේ අචලව සවිකර ඇත. දිග 4b සහ බර W වන ඒකාකාර දණ්ඩක් පාත්‍රය තුළට දමා ඇත්තේ එහි කෙළවරක් පාත්‍රයේ ඇතුල් පෘෂ්ටය ස්පර්ශ කරමින්ද අනෙක් කෙළවර පාත්‍රයෙන් පිටතට නෙරා පවතිමින් ද, පිහිටන අන්දමිනි. දණ්ඩේ කෙළවරේදී පාත්‍රය ඇති කරන ප්‍රතික්‍රියාව R ද පාත්‍ර ගැට්ට මගින් ඇතිකරන ප්‍රතික්‍රියාව S ද වේ. දණ්ඩ තිරසට ආනත කෝණය α නම් $\tan\alpha = \dfrac{Rb}{Sa}$ බව පෙන්වන්න. දෙන ලද අන්දමින් සමතුලිත වීම සඳහා $\sin\alpha > \dfrac{Rb}{Wa}$ විය යුතු බව ද පෙන්වන්න.

C

21. සුමට තුනී අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් සුමට තිරස් තලයක් මත නිශ්චලව තබා ඇත්තේ වක්‍ර පෘෂ්ටය, තලය ස්පර්ශ කරන අන්දමිනි. ඒකාකාර බර දණ්ඩක් පාත්‍රය තුලට දමා ඇත්තේ එහි කෙළවරක් පාත්‍රයේ ඇතුල් පෘෂ්ටය ස්පර්ශ කරමින්ද අනෙක් කෙළවර පාත්‍රයෙන් පිටතට නෙරා පිහිටමින්ද පවතින අන්දමිනි. සමතුලිත පිහිටුමේදී දණ්ඩත්, පාත්‍ර ආධාරකයත් තිරස සමග පිළිවෙළින් α සහ β කෝණ සාදයි.
පාත්‍රයේ සහ දණ්ඩේ බර අතර අනුපාතය $2\cos(2\alpha + \beta)\sin\beta$ බව පෙන්වන්න.
පාත්‍රයේ අරය සහ දණ්ඩේ දිග අතර අනුපාතය $\cos\alpha\ 4\cos(2\alpha + \beta)$ බවද පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

22. අරය a සහ බර 2w වන ඒකාකාර තුනී සුමට අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක් සුමට තිරස් තලයක් මත තබා ඇත්තේ එහි වක්‍ර පෘෂ්ටය, තලය ස්පර්ශ කරන අන්දමිනි. දිග $2l$ සහ බර w වන ඒකාකාර දණ්ඩක් පාත්‍රය තුළට දමා ඇත්තේ එහි කෙළවරක් පාත්‍රයේ ඇතුල් පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ කරමින් ද අනෙක් කෙළවර පාත්‍රයෙන් පිටතට නෙරා පවතිමින් ද පිහිටන අන්දමිනි.

සමතුලිතතාවේ දී දණ්ඩ සහ පාත්‍ර ගැට්ට තිරසට ආනත වන කෝණ පිළිවෙලින් θ සහ α වේ.

(i) $2a\cos(2\theta+\alpha) = l\cos\theta$ (ii) $\theta+\alpha = \dfrac{\pi}{4}$

(iii) $\tan\alpha = \dfrac{l}{2\sqrt{2}a - l}$ බව පෙන්වන්න.

23. r අරය වූ සුමට ඒකාකාර අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක්, සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසලව තිබෙයි. $2l$ දිගින් ද පාත්‍රයේ බරට සමාන බරින්ද යුත් සුමට ඒකාකාර දණ්ඩක් නිශ්චලතාවේ ඇත්තේ එහි කොටසක් පාත්‍රය ඇතුලේ තිබෙන පරිදිය.

සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී තිරසට අර්ධගෝලයේ ආධාරකයේ ආනතිය $\alpha\left(<\dfrac{\pi}{2}\right)$ ද පාත්‍රය ඇතුලේ වූ දණ්ඩේ කොටස මගින් කේන්ද්‍රයේ දී ආපාතනය කැරෙන කෝණය $2\beta\left(>\dfrac{\pi}{2}\right)$ ද වෙයි.

(i) $r = l\,\mathrm{cosec}\,\alpha\,\sin(\alpha+\beta)$ බවත්

(ii) $\cot\alpha = \tan 2\beta - \dfrac{1}{2}\sec 2\beta$ බවත් පෙන්වන්න.

24. බර w ද අරය r ද වූ ඒකාකාර සුමට අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසලව තිබෙයි. $2l$ දිගින් හා W බරින් යුත් ඒකාකාර දණ්ඩක් නිසලව පවතින්නේ එහි කොටසක් පාත්‍රය ඇතුලේ පිහිටන පරිදිය. තිරසට අර්ධ ගෝලයේ ආධාරකයේ ආනතිය $\dfrac{\pi}{6}$ වේ. තිරසට දණ්ඩේ ආනතිය $\theta\left(<\dfrac{\pi}{2}\right)$ නම්, ජ්‍යාමිතික ලෙස හෝ අන් අයුරකින් හෝ

(i) $\theta = \dfrac{1}{2}\left[\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{\pi}{6}\right]$ බවත්,

(ii) $l = \dfrac{r}{2}\sec\theta$ බවත් සාධනය කරන්න.

25. බර w ද දිග $2a$ වන ඒකාකාර දණ්ඩක දෙකෙළවර A හා B ය. සුමට තිරස් තලයක් මත තබා ඇති අරය a ද බර 2w ද වූ සුමට ඒකාකාර අර්ධගෝලාකාර පාත්‍රයක් තුල A කෙළවරද B කෙළවර පාත්‍රයේ ගැට්ටෙන් පිටතට නෙරා පිහිටමින්ද පවතින සේ දණ්ඩ පාත්‍රය තුල තැබූ විට පාත්‍ර ගැට්ට තිරසට θ කෝණයකින් ආනතව පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ තිබේ.
$7\tan\theta = 2\sqrt{2}+1$ බව සාධනය කරන්න.

Scanned with CamScanner

26. බර W_1 වූ ඒකාකාර දණ්ඩක්, කොටසක් බර W_2 සහ අරය a වූ ඒකාකාර තුනී අර්ධ ගෝලාකාර පාත්‍රයක් ඇතුලත ද ඉතිරි කොටස පිටතද සිටින සේ නිශ්චලව තිබේ. පාත්‍රය ද සුමට තිරස් මේසයක් මත නිශ්චලව ඇත. පාත්‍රයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි සමමිතික අරයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයෙහි වේ. සමතුලිත පිහිටීමේදී දණ්ඩ තිරසට 30^0 කෝණයකින් ආනත වන අතර පාත්‍රයේ ගැටියෙහි තලය තිරසට θ^0 ($< 30^0$) කෝණයකින් ප්‍රතිවිරුද්ධ අතට ආනත වේ.

(i) $\cot\theta = \left(\sqrt{3} + \dfrac{W_2}{W_1}\right)$ බවත්,

(ii) පාත්‍රය තුළ වන දඬු කොටස එහි දිගෙන් $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\ \dfrac{\cos(30^0+\theta)}{\sin(30^0+\theta)}$ භාගයක් බවත්,

(iii) දණ්ඩ හා පාත්‍රයේ ගැටිය අතර ප්‍රතික්‍රියාව $\dfrac{W_2}{\left(\sqrt{3}\ \dfrac{W_2}{W_1} + 2\right)}$ බවත් පෙන්වන්න.

(2001 APP)

27. දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන ඒකතල බල තුනක් මගින් එම වස්තුව සමතුලිතතව තබා ගනියි නම්, එක්කෝ ඒවා ලක්ෂ්‍යයකදී හමුවිය යුතු බව නැතහොත් සමාන්තර විය යුතු බව පෙන්වන්න. බර W ද, අරය r ද වූ ඒකාකාර සුමට අර්ධ ගෝලීය පාත්‍රයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසලව තිබෙයි. $2l$ දිගින් හා W බරින් යුත් ඒකාකාර දණ්ඩක් නිසලව පවතින්නේ එහි කොටසක් පාත්‍රය ඇතුලේ පිහිටන පරිදිය. තිරසට ගෝලයේ ආධාරකයේ ආනතිය $\dfrac{\pi}{6}$ වේ. තිරසට දණ්ඩේ ආනතිය $\theta \left(< \dfrac{\pi}{6}\right)$ ද පාත්‍රයේ ගැටියේදී

ප්‍රතික්‍රියාව R නම්, ජ්‍යාමිතික ලෙස හෝ අන්අයුරකින් හෝ

(i) $\theta = \left[\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{\pi}{2}\right]$ බවත් (ii) $l = \dfrac{1}{2}\sec\theta$ බවත්

(iii) $R = \dfrac{W}{(8+\sqrt{3}-\sqrt{15})^{1/2}}$ බවත් සාධනය කරන්න.

(1995 A/L)

D

28. w බරැති ඒකාකාර දණ්ඩක දෙකෙළවර A හා B ය. A වලදී දණ්ඩ අචල ලක්ෂ්‍යයකට අසව්කොට තිබේ. B වලදී යොදනු ලබන තිරස් බලයක් වූ P නිසා දණ්ඩ තිරසට 60^0 ක කෝණයකින් ආනතව සිරස් තලයක සමතුලිතව පිහිටයි. P වල අගයද අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාවද සොයන්න.

29. w බරැති ඒකාකාර දණ්ඩක දෙකෙළවර A හා B ය. A වලදී දණ්ඩ අචල ලක්ෂ්‍යයකට අසව්කොට තිබේ. B හිදී යොදනු ලබන $\dfrac{3w}{4}$ බරැති තිරස් බලයක් නිසා දණ්ඩ තිරසට ආනතව සිරස් තලයක සමතුලිතතාවයේ පිහිටයි. දණ්ඩ තිරසට ඇතිකරන ආනතියද අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාවද සොයන්න.

Scanned with CamScanner

30. ඒකාකාර AB දණ්ඩක දිග l හා බර 2w වේ. එයට එහි A උඩු කෙළවරෙහි වූ සුමට අසව්වක් වටා කරකැවීමට අවකාශ ඇති අතර B කෙළවරට P තිරස් බලයක් යොදා A හරහා ඇඳි සිරස් රේඛාවේ සිට a දුරකින් B පිහිටන සේ දණ්ඩ සමතුලිතතව තබා ඇත. P හි අගය සොයා අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාව $w\left[\dfrac{4l^2-3a^2}{l^2-a^2}\right]^{1/2}$ බව පෙන්වන්න.

31. w බර වන ඒකාකාර AB දණ්ඩක A කෙළවර අචල ලක්ෂ්‍යයකට අසව් කර ඇත. B ලක්ෂ්‍යයට හා A ට සිරස් ලෙස ඉහළින් වූ C ලක්ෂ්‍යයකට සම්බන්ධ කරන ලද තන්තුවක් මගින් දණ්ඩ තිරස් පිහිටීමක සමතුලිතව තබා ඇත. තන්තුව දණ්ඩට 60^0 ක කෝණයකින් ආනත වේ. තන්තුවේ ආතතිය සහ අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න.

32. w බරැති $2a$ දිගැති ඒකාකාර දණ්ඩක් අචල සුමට නාදැත්තක් මත සමතුලිතතව තබා ඇත්තේ දණ්ඩේ එක් කෙළවරක් සුමට සිරස් බිත්තියක් සමග ස්පර්ශ වන පරිදිය. නාදැත්තේ සිට බිත්තියට දුර b වේ. දන්ඩේ සිරසට ආනතිය θ නම්,

(i) දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

(ii) $\sin^3\theta = \dfrac{b}{a}$ බව පෙන්වන්න.

33. ඒකාකාර නොවන AB දණ්ඩක් එහි පහළ A කෙළවර තිරසට α කෝණයකින් ආනත වූ සුමට තලයක් මත පිහිටා ඇති අතර B ඉහළ කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට හේත්තු වන සේ ද සිරස් තලයක සමතුලිතව පවතී. තිරසට එහි ආනතිය β නම්, එහි ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙන් දණ්ඩ බෙදෙන අනුපාතය $\sin\alpha\sin\beta : \cos(\alpha+\beta)$ බව පෙන්වන්න.

E

34. අරය b වන ගෝලයක් තුළ එකිනෙකෙහි අරය a වූ A, B, C සමාන සුමට ඒකාකාර ගෝල තුනක් A, B මත C පිහිටන සේ සමමිතික ලෙස තබා ඇත. A, B, C ගෝලවල බර W බැගින් වේ. A හා B ගෝල අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. පද්ධතිය සමතුලිතව පැවතීම සඳහා $b < a(1+2\sqrt{7})$ බව පෙන්වන්න.

35. අර්ධ විෂ්කම්භය R වන සිලින්ඩරයක් තුළ එකිනෙකෙහි අර්ධ විෂ්කම්භය r ද බර W ද වූ A, B හා C සමාන සුමට ඒකාකාර සිලින්ඩර තුනක් A, B සිලින්ඩර මත C සිලින්ඩරය පිහිටන සේ සමමිතික ලෙස තබා ඇත. අක්ෂ තිරස්ව පිහිටන සේ සිලින්ඩර සියල්ල තබා ඇත්නම් පද්ධතිය සමතුලිතව පැවතීම සඳහා $r > \dfrac{R}{2\sqrt{7}+1}$ විය යුතු බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

36. අර්ධ විෂ්කම්භය r වූ සුමට කුහර කපාගන්නා ලද අර්ධ ගෝලයක් ගැට්ට තිරස්ව පිහිටන සේ දෘඪ ලෙස සවිකොට ඇත. ඒකාකාර සිහින් බරැති දණ්ඩක් ගෝලයේ කේන්ද්‍රය හරහා යන සිරස් තලයක සමතුලිතව ඇත්තේ දණ්ඩේ කෙළවරක් අර්ධ ගෝලය ඇතුළත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක ගැටෙමින් ද අනෙක් කෙළවර ගැට්ටෙන් පිටතට නෙරා පිහිටීමෙන්ද තිබෙනසේය. දණ්ඩේ දිග l ද, තිරසට ආනත කෝණය θ ද නම්, $l \cos\theta = 4r\cos 2\theta$ බව ද $4r > l > \dfrac{2\sqrt{6}r}{3}$ බව ද පෙන්වන්න.

37. A, B, C වූ කලී එක එකක් W බරැති සමාන සුමට ඒකාකාර සිලින්ඩර තුනකි. l තිරස් රේඛාවක් දිගේ එකිනෙක කැපෙන තිරසට α කෝණයකින් ආනත සුමට තල දෙකක් අතර A හා B සමමිතික ලෙස C සිලින්ඩරය තබනු ලැබේ. සිලින්ඩර තුනේම අක්ෂ l රේඛාවට සමාන්තරව පිහිටයි. A හා B සිලින්ඩර අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. $\tan\alpha > \dfrac{\sqrt{3}}{9}$ නම් සිලින්ඩර වෙන් නොවන බව පෙන්වන්න.

F

38. පාදයක දිග a වූ සමපාද ත්‍රිකෝණයක ශීර්ෂ දෙකකට සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක අග්‍ර ඈඳා ඇත. තන්තුව කුඩා සුමට නාදැත්තක් ඔස්සේ යමින් සමතුලිතතාවේදී ආස්තරයේ පාදයක් සිරස්ව පිහිටයි. තන්තුවේ එක් එක් කොටස සිරස සමඟ 30^0 ක කෝණයක් සාදන බව ද තන්තුවේ දිග $\sqrt{3}a$ බව ද පෙන්වන්න. තන්තුවේ ආතතියද සොයන්න.

39. අඩ සිරස් කෝණය $\tan^{-1}(\sqrt{2})$ වූ ඒකාකාර ඍජුවෘත්ත කේතුවක් කුඩා සුමට නිදැත්තකින් එල්ලා තිබෙන්නේ කේතුවේ ශීර්ෂයටත් එහි වෘත්ත ආධාරකයෙහි පරිධිය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකටත් සවිකර නාදැත්ත උඩින් යවා ඇති ලුහු අප්‍රත්‍යාස්ථ තන්තුවක් මගිනි. කේතුව එහි අක්ෂය තිරස් වන සේ නිශ්චලතාවෙහි පවතී නම් තන්තුවේ දිග කේතුවේ උස මෙන් තුන් ගුණයක් බව ජ්‍යාමිතික ක්‍රමයක් මගින් හෝ අන් අයුරකින් හෝ පෙන්වන්න.

40. ඒකාකාර ද්‍රව්‍යයකින් සැදි ඍජුවෘත්තාකාර කේතුවක පතුලේ අර්ධ විෂ්කම්භය r වේ. උස h වේ. දිග l වූ සැහැල්ලු තන්තුවක් එකම තිරස් මට්ටමේ එකිනෙකට d දුරකින් $(h > d)$ ඇත්වූ සුමට කුඤ්ඤ දෙකක් මගින් පන්නා තන්තුවේ එක් කෙළවරක් කේතුවේ ශීර්ෂයට ද, අනෙක් කෙළවර කේතුවේ පාදයේ පරිධියේ වූ ලක්ෂ්‍යයකට ද ගැටගසා තිබේ. කේතුවේ අක්ෂය තිරස්ව පිහිටන සේ පද්ධතිය සමතුලිතතාවයේ පවතී නම්, $t = \dfrac{d + (h-d)\sqrt{h^2 + 4r^2}}{h}$ බව පෙන්වන්න.

41. බර W වූ ද, G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙන් දණ්ඩ a හා b දිගැති කොටස් දෙකකට බෙදන්නා වූ ද AB දණ්ඩක දෙකෙළවරට $l\,(> a + b)$ දිග ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් ගැට ගසා තිබේ. තන්තුව කුඩා සුමට P නාදැත්තක් උඩින් යවා දණ්ඩ සමතුලිතතාවේ තබා ඇත.

(අ) (i) $A\hat{P}G = B\hat{P}G$ බව ද,

Scanned with CamScanner

(ii) $\cos A\hat{P}G = \frac{a+b}{2l}\left[\frac{l^2(a+b)}{ab}\right]^{1/2}$ බව ද පෙන්වන්න.

(ආ) තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න. *(1991 A/L)*

42. බරින් සමාන වූද අරය a සහ b වූ ද ඒකාකාර ගෝල දෙකක් පෘෂ්ඨ දෙකට දෙකෙළවර ඇඳෙන ලද ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් සුමට නාදැත්තක එල්ලා ඇත. තන්තුවේ l නම් තන්තු කොටස් දෙකෙහි එක් එකක් සිරසට $\sin^{-1}\frac{a+b}{a+b+l}$ කෝණයක් ආනත කරන බව පෙන්වන්න.

G

43. ඒකාකාර W බර දණ්ඩක එක් කෙළවරක් O අචල ලක්ෂ්‍යයක් වටා නිදහසේ චලිත විය හැකිය. අරය r සහ බර W වන ඒකාකාර ගෝලයක් එල්ලෙමින් තිබෙන තන්තුවක් O ට ඈඳා තිබේ. දණ්ඩේ දිග 4r ද තන්තුවේ දිග r ද නම්, දණ්ඩ හා තන්තුව සිරසට $\frac{\pi}{12}$ කෝණයක් ආනත බව පෙන්වා තන්තුවේ ආතතිය $\frac{W}{6}(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$ බව පෙන්වන්න.

44. අරය r වන බර w වන ගෝලයක් දිග l වන ලුහු තන්තුවකින් අචල ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳා ඇත. දිග $2a$ සහ බර w වන ඒකාකාර දණ්ඩක එක් කෙළවරක් මෙම අචල ලක්ෂ්‍යයට ඈඳා ඇත්තේ එම ලක්ෂ්‍යය වටා නිදහසේ භ්‍රමණය වීමට හැකිවනසේය. දණ්ඩ, ගෝලය ස්පර්ශ කරමින් පද්ධතිය සමතුලිතව පවතී. එම තන්තුව සිරස සමඟ ආනත කෝණය වන θ හි අගය,

$$\tan\theta = \frac{wa\cos^2\alpha}{wr + wa\sin\alpha\cos\alpha}$$ මගින් ලැබෙන බව පෙන්වන්න.

මෙහි $\cos\alpha = \frac{r}{l+r}$

w, w, r, l සහ α මගින් තන්තුවේ ආතතිය ද සොයන්න.

H

45. දිග $2a$ ද බර W ද වූ ඒකාකාර සුමට AB දණ්ඩට එහි අචල A කෙළවර වටා සුචල ලෙස හැරෙන්නට පුළුවන. බර 2W වූ කුඩා සුමට C මුදුවකට දණ්ඩ දිගේ සර්පණය විය හැකිය. A ලක්ෂ්‍යය මෙන් එකම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි D අචල ලක්ෂ්‍යයකට මුදුව ඈඳා ඇත්තේ $\frac{a}{4}$ දිගෙන් යුත් අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගිනි.

තන්තුවත් දණ්ඩත් එකම සිරස් තලයක පිහිටයි. AD $= \frac{a}{4}$ සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී දණ්ඩ හා මුදුව අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයා දණ්ඩ තිරස සමඟ $\frac{\pi}{3}$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න.

තන්තුවේ ආතතියත් A කෙළවරේ ප්‍රතික්‍රියාවත් සොයන්න. *(1994 A/L)*

Scanned with CamScanner

46. W බරැති a දිගැති ඒකාකාර දණ්ඩක දෙකෙළවර A හා B ය. A කෙළවරෙහි දී සිරස් බිත්තියකට අසව් කොට ඇති දණ්ඩ සිරස් තලයක සමතුලිතව තබා ඇත්තේ දණ්ඩ තුළින් ගමන් කරන $\frac{W}{2}$ බරැති මුදුවක් හා A ට සිරස් ලෙස h ඉහලින් බිත්තියේ පිහිටි ලක්ෂ්‍යයක් යා කරන සැහැල්ලු තන්තුවක් මගිනි. තන්තුවේ දිග l නම්, තන්තුව සිරසට දරණ ආනතිය θ නම් ද,

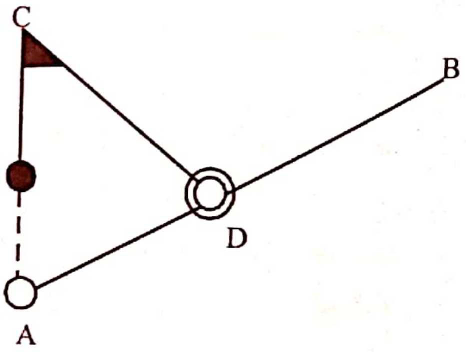
$$a = \frac{(h^2 - 2hl\cos\theta + l^2)^{3/2}}{l\,(h\cos\theta - 1)}$$ බව පෙන්වන්න.

47. දිග $2a$ වන ඒකාකාර AB දණ්ඩක් O හි පිහිටි සුමට නාදැත්තකින් එල්ලා ඇත්තේ දිග $2l$ වන AOQ සැහැල්ලු තන්තුවක් ආධාරයෙනි. තන්තුවේ එක් කෙළවරක් A ට ද, අනෙක් කෙළවර දණ්ඩ දිගේ සර්පණය වීමට නිදහස් සුමට සැහැල්ලු Q මුදුවකට ද, සම්බන්ධ කොට ඇත.

ඇඳී ඇති තන්තු කොටස්වල සිරසට ආනතියත්, දණ්ඩෙහි තිරසට ආනතියත් සමාන බව පෙන්වන්න. එම ආනත කෝණය θ නම් $a\cos^3\theta = l\sin\theta$ බව පෙන්වන්න.

දණ්ඩෙහි බර W නම් තන්තුවේ ආනතිය $\frac{W}{2}\sec\theta$ බව ද, පෙන්වන්න.

48. සුමට ඒකාකාර AB දණ්ඩක දිග $3a$ සහ බර W වේ. මෙය A හිදී අසව් කර ඇත්තේ දණ්ඩට ලම්භක වූ තලයක භ්‍රමණය වියහැකි පරිදි වේ. සැහැල්ලු සුමට D මුදුවකට දණ්ඩ මත සර්පණය විය හැකිය. D මුදුවට ඈඳූ අවිතන්‍ය තන්තුව C නාදැත්ත උඩින් දමා $2w$ වූ අංශුවක් සවිකර ඇත. $2w$ භාරය සිරස්ව එල්ලෙමින් පද්ධතිය සමතුලිතව තිබෙයි. $AC = 4a$ වේ.



(i) CD තන්තු කොටස AB දණ්ඩට ලම්භව බව

(ii) සමතුලිත විට දණ්ඩ සිරසට θ ආනත නම් $3W\tan\theta = 16w$ බව

(iii) A අසව්වේ ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. $\frac{w}{W}$ හි අවම අගය ලබාගන්න.

I

49. බර W වූ තුනී අර්ධගෝලාකාර කබොළක් වක්‍ර පෘෂ්ඨය තිරස් තලයක් මත තබා නිශ්චලතාවෙහි ඇත. ගැටිය මතවූ ලක්ෂ්‍යයකට $\frac{W}{3}$ වූ බරක් එල්ලනු ලැබේ. සමතුලිත පිහිටීමේදී ගැටියේ තලය තිරස සමග සාදන කෝණය සොයන්න.

50. අරය a සහ බර w වූ ඝන අර්ධගෝලයක් වක්‍ර පෘෂ්ඨය තිරස් තලයක් මත ස්පර්ශ වන සේ තබා ඇත. තලය මත වූ ලක්ෂ්‍යයකට සවිකරන ලද දිග $\frac{a}{2}$ වූ තන්තුවක අනික් කෙළවර ගැට්ට මත වූ ලක්ෂ්‍යයකට සවිකර ඇත. තන්තුවේ ආතතිය $\frac{\sqrt{3}W}{8}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

51. බර w වූද අරය r වූද ඒකාකාර ඝණ අර්ධගෝලයක වක්‍ර පෘෂ්ඨය සුමට තිරස් මේසයක් මත ගැටෙමින්, එහි තල මුහුණත තිරසට ආනතව පිහිටන සේ සමතුලිතතාවයේ තබා ඇත්තේ මේසය මත පිහිටි ලක්ෂ්‍යයකට සහ අර්ධගෝලයේ ගැට්ටට ඈඳා ඇති $\dfrac{3r}{4}$ දිගැති තන්තුවක් මගිනි. සමතුලිතතාවය සඳහා තන්තුව මේසයට ලම්භ විය යුතු බව පෙන්වා තන්තුවේ ආතතිය $\dfrac{\sqrt{15}w}{40}$ බව පෙන්වන්න.

52. වෘත්ත චාපයක හැඩය ගත් සැහැල්ලු දෘඪ AB කම්බියක් කේන්ද්‍රයෙහි α කෝණයක් ආපාතනය කරයි. කම්බියේ A, B දෙකෙළවරින් 3W හා W බරැති අංශු දෙකක් එල්ලා වක්‍ර පෘෂ්ඨය තිරස් තලයක් මත නිශ්චලතාවෙහි ඇත. A ඔස්සේ අරය සිරස සමග සාදන කෝණය β නම්,

$\beta = \tan^{-1}\left(\dfrac{\sin\alpha}{3+\cos\alpha}\right)$ බව පෙන්වන්න.

53. බර W වූ තුනී අර්ධගෝලාකාර කබොලක් වක්‍ර පෘෂ්ඨය තිරස් තලයක් මත තබා නිශ්චලතාවෙහි ඇත. ගැට්ය මත වූ ලක්ෂ්‍යයකට $\dfrac{W}{3}$ වූ බරක් එල්ලනු ලැබේ. සමතුලිත පිහිටීමේදී ගැට්යේ තලය තිරස සමග සාදන කෝණය සොයන්න.

J

54. තිරසට θ කෝණයකින් ආනත සුමට තලයක් මත සිලින්ඩරාකාර පයිප්පයක් එහි අක්ෂය තිරස්ව පිහිටන සේ සමතුලිතතාවේ තබා ඇත්තේ සිලින්ඩරය මත ගැටෙන AB ඒකාකාර දණ්ඩක් මගිනි. ආනත තලය සමඟ α කෝණයක් සාදන මෙම දණ්ඩේ A කෙළවර සිලින්ඩරයට පහළින් ආනත තලය මත වූ ලක්ෂ්‍යයකට අසව් කර තිබේ. B කෙළවර සිලින්ඩරය ස්පර්ශ වෙමින් පවතී. දණ්ඩේ බර සිලින්ඩරයේ බර මෙන් දෙගුණයකි. එකිනෙක ගැටී ඇති පෘෂ්ඨ සියල්ලම සුමට ඒවා නම් ද, සිලින්ඩරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා ගමන් කරන සිරස් තලයේ දණ්ඩ පිහිටා ඇත්නම් ද, $\text{Tan}\ \theta = \dfrac{\sin 2\alpha}{3-\cos 2\alpha}$ බව පෙන්වන්න.

55. තිරසට θ කෝණයකින් ආනත සුමට තලයක් මත අර්ධ විෂ්කම්භය a වූ සිලින්ඩරාකාර පයිප්පයක් එහි අක්ෂය තිරස්ව පිහිටන සේ සමතුලිතතාවේ තබා ඇත්තේ සිලින්ඩරය මත ගැටෙන ඒකාකාර ලෑල්ලක් මගිනි. ආනත තලය සමඟ α කෝණයක් සාදන මෙම ලෑල්ලේ කෙළවරක් සිලින්ඩරයට පහලින් ආනත තලය මත වූ ලක්ෂ්‍යයකට අසව් කොට තිබේ. සිලින්ඩරයේ බර w ය. ලෑල්ලේ බර W ය. සිලින්ඩරයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය හරහා යන සිරස් තලයේ ලෑල්ලේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය පිහිටා තිබේ. ලෑල්ලේ දිග $2l$ නම්, පද්ධතිය සමතුලිතතාවේ ඇති විය.

$\dfrac{wa}{Wl} = \cos(\alpha+\theta)\left(\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\theta}\right)$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

K

56. සුමට අර්ධ ගෝලාකාර කෝප්පයක් තුළ කෝප්පයේ අරයට සමාන දිග ඇති බර දණ්ඩක් තබා තිබේ. දණ්ඩේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි එක කෙළවරක සිට එහි දිගෙන් තුනෙන් එකක් ඈතින් ඇත. සිරස සමග දණ්ඩ සාදන කෝණය $\tan^{-1}\left(3\sqrt{3}\right)$ බව පෙන්වන්න.

57. තිරසට α හා β බැගින් ආනතව ඇති සුමට තල දෙකක් සරල රේඛාවක දී හමුවේ. එම තල දෙක සඳහා W බර ඒකාකාර දණ්ඩක් සමතුලිතතාවයේ පවතින්නේ දණ්ඩ හරහා යන සිරස් තලය තල දෙකෙහි ඡේදන රේඛාවට ලම්භක වන සේය. දණ්ඩේ සිරසට ආනතිය θ නම්, $2\cot\theta = \cot\alpha - \cot\beta$ බව පෙන්වන්න. දෙකෙළවර දී දණ්ඩ මත ප්‍රතික්‍රියාවල විශාලත්ව සොයන්න.

58. ඒකාකාර AB දණ්ඩක් එහි A උඩු කෙළවර සුමට නාදැත්තකට හේත්තු කර A මට්ටමේ වූ C ලක්ෂ්‍යයකට ගැටගැසූ ලණුවක් එහි පහළ B කෙළවරට ගැට ගැසීමෙන් තිරසට α කෝණයකින් සමතුලිතතාවයේ පිහිටුවා ඇත. ලණුව තිරසට ආනතව ඇති කෝණය β නම්,

$\tan\beta = 2\tan\alpha + \cot\alpha$ බවත් $AC = \dfrac{AB\sec\alpha}{1 + 2\tan^2\alpha}$ බවත් පෙන්වන්න.

59. ABC ත්‍රිකෝණාකාර ආස්තරයක A හා B ට ගැට ගැසූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තු 2 ක් මගින් එය O ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා ඇත. සමතුලිතතා පිහිටීමේදී එහි BC පාදය සිරස්ව පිහිටයි නම් ද, AO හා BO තන්තු සිරසට α හා β කෝණ සාදයි නම්, $2\cot\alpha - \cot\beta = 3\cot\beta$ බව පෙන්වන්න.

60. ඒකාකාර නොවූ AB දණ්ඩේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය G වේ. තිරසට α කෝණයකින් ආනත වූ සුමට තලයක් මත සිය A කෙළවර සිටින සේ ද, එහි B කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට හේත්තුවන සේ ද ඇත. දණ්ඩ තිරසට ආනතිය β නම්, $\dfrac{AG}{GB} = \sin\alpha\sin\beta\sec(\alpha+\beta)$ බව පෙන්වන්න.

61. W බරැති ඒකාකාර දණ්ඩක දෙකෙළවර A හා B ය. A කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියක ගැටෙමින් ද, A කෙළවරට ඉහළින් B කෙළවර පිහිටන සේ ද, දණ්ඩ සමතුලිතව තබා ඇත්තේ B හා එකම තිරස් මට්ටමේ බිත්තිය මත පිහිටි D ලක්ෂ්‍යයක් හා දණ්ඩ මත පිහිටි C ලක්ෂ්‍යය සම්බන්ධ කරන සැහැල්ලු තන්තුවක් මගිනි. දණ්ඩ සිරසට θ කෝණයකින් ද, CD තන්තුව සිරසට α කෝණයක් ද ආනත නම්,

(i) $\tan\theta = 2\tan\alpha$ බව ද,

(ii) $AB = 3\,AC$ බව ද පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

L

62. අර්ධ විෂ්කම්භය a වූ සුමට අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් එහි ගැට්ටට තිරස් වන සේ සවිකර ඇත. බර $2W$ ද දිග l ද වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක් A පාත්‍රයෙහි වක්‍ර පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ වන ලෙස ද දණ්ඩේ ලක්ෂ්‍යයක් ගැට්ට ස්පර්ශ වන ලෙස ද පවතී. B කෙළවරට W භාරයක් ඈඳා තිරස θ කෝණයකින් දණ්ඩ සමතුලිතතව තබා ඇත. $l = 3a \cos 2\theta \sin \theta$ බව පෙන්වන්න.

63. ඒකාකාර දණ්ඩක දිග $2l$ ය. බර W ය. මෙම දණ්ඩේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයේ සිට d දුරකින් w බරැති ස්කන්ධයක් අමුණා තිබේ. දණ්ඩ සහිත ස්කන්ධය අර්ධ විෂ්කම්භය R වූ $(R > l)$ සුමට ගෝලයක් තුල සමතුලිතතාවයේ තිබේ. දණ්ඩ තිරසට දරන ආනතිය θ නම් $\tan \theta = \dfrac{wd}{(W + w)\sqrt{R^2 - l^2}}$ බව පෙන්වන්න.

M

64. දිග a හා b වන තන්තු දෙකක් මගින් W භාරයක්, එකම තිරස් මට්ටමක $\sqrt{a^2 + b^2}$ දුරක පරතරයකින් පිහිටි ලක්ෂ්‍යය දෙකකින් එල්ලා ඇත. තන්තුවල ආතති $\dfrac{Wa}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ හා $\dfrac{Wb}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ බව පෙන්වන්න.

65. අරය a වූ H සුමට කුහර වෘත්ත සිලින්ඩරයක්, එහි අක්ෂය තිරස්ව සවිකර ඇත. එක එකක අරය $b \left(< \dfrac{a}{2}\right)$ සහ බර W වූ A සහ B සමාන සුමට ඒකාකාර සෘජුවෘත්ත සිලින්ඩර දෙකක් සමමිතිකව II ඇතුළත තබා ඇත්තේ, ඒවායේ අක්ෂ II හි අක්ෂයට සමාන්තරව සමතුලිතව තිබෙන පරිදිය. A සහ B අතර ප්‍රතික්‍රියාව $\dfrac{bW}{\sqrt{a(a-2b)}}$ බව පෙන්වන්න. A සහ B එක එකකට සමාන C සිලින්ඩරයක් සිය අක්ෂය H හි අක්ෂයට සමාන්තර වන පරිදි, එය දෙක මත පරිස්සමින් සමමිතිකව තබනු ලැබේ. $a < b\,(1 + 2\sqrt{7}\,)$ නම් පමණක් A සහ B ස්පර්ශව සමතුලිතතාව පැවතිය හැකි බව පෙන්වන්න.

66. අරය a වන සුමට තුනී අර්ධ ගෝලාකාර පාත්‍රයක් එහි ගැටිය තිරස් ව සහ ඉහළින් ම පිහිටන පරිදි සවිකොට ඇත. බර W සහ දිග $2l\ (> 2a)$ වන සුමට AB ඒකාකාර දණ්ඩක් A කෙළවර පාත්‍රයේ ඇතුළත පෘෂ්ඨයේ පිහිටන පරිදි දණ්ඩේ C ලක්ෂ්‍යයක් පාත්‍රයේ ගැටිය මත ගැටෙමින් නිසලව ඇත. දණ්ඩ මත ක්‍රියාකරන බල සටහන් කරන්න.

A වටා ඝූර්ණ ගැනීමෙන් C හි දී R ප්‍රතික්‍රියාවේ විශාලත්වය $\dfrac{Wl}{2a}$ බව පෙන්වන්න. තවද R සහ W අතර තවත් සම්බන්ධතාවක් ලබාගන්න. ඒ නයින් CB හි දිග $\dfrac{1}{4}(7l - \sqrt{l^2 + 32a^2})$ බව පෙන්වන්න. *[2003]*

Scanned with CamScanner

67. එක එකෙහි අරය a සහ බර W වූ ඒකාකාර සුමට ගෝල දෙකක් එකිනෙක ස්පර්ශ කරමින් අරය b ($> 2a$) වූ අචල සුමට අර්ධගෝලාකාර පාත්‍රයක ඇතුළත නිශ්චලව තිබේ. එක් ගෝලයක් මත ක්‍රියා කරන බල නිරූපණය කරමින් වෙනම රූප සටහනක බල ත්‍රිකෝණයක් ඇඳ ගෝල දෙක අතර ප්‍රතික්‍රියාව $\dfrac{Wa}{\sqrt{b(b-2a)}}$ බව පෙන්වන්න. *[2002]*

68. සුමට නාදැත්තක්, සුමට සිරස් බිත්තියකට a දුරකින් වූ P ලක්ෂ්‍යයක සවිකර ඇත. දිග $6a$ සහ බර W වූ ඒකාකාර AB දණ්ඩක්, A කෙළවර බිත්තිය සමග ස්පර්ශව, නාදැත්ත මත නිශ්චලතාවේ සමතුලිතව තිබේ. AB දණ්ඩ තිරස සමග සාදන කෝණය θ ලෙස ගෙන දණ්ඩ මත ක්‍රියා කරන බල නිරූපණය කරමින් බල ත්‍රිකෝණයක් අඳින්න. P හිදී ප්‍රතික්‍රියාව W සහ θ ඇසුරින් සොයන්න. $3\cos^3\theta = 1$ බව පෙන්වන්න. *[2001]*

69. දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන සමාන්තර නොවන ඒකතල බල තුනක් මඟින් එම වස්තුව සමතුලිතතාවේ තබයි නම් එම බල තුන ලක්ෂ්‍යයක දී හමුවන බව පෙන්වන්න.

අරය r වූ සුමට ඒකාකාර අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසලව තිබෙයි. $2l$ දිගින් ද පාත්‍රයේ බරට සමාන බරින් ද යුත් සුමට ඒකාකාර දණ්ඩක් නිශ්චලතාවේ ඇත්තේ එහි කොටසක් පාත්‍රය ඇතුලේ තිබෙන පරිදිය. සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී තිරසට අර්ධගෝලයේ ආධාරකයේ ආනතිය $\alpha \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ ද පාත්‍රය ඇතුලේ වූ දණ්ඩේ කොටස මඟින් කේන්ද්‍රයේ දී ආපාතනය කෙරෙන කෝණය $2\beta \left(> \frac{\pi}{2}\right)$ ද වෙයි.

(i) $r = l \operatorname{cosec}\alpha \sin(\alpha + \beta)$ බවත්

(ii) $\cot\alpha = \tan 2\beta - \frac{1}{2}\sec 2\beta$ බවත් පෙන්වන්න. *[1998]*

70. දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන සමාන්තර නොවන ඒකතල බල තුනක් මඟින් එම වස්තුවේ සමතුලිතතාවේ පිහිටයි නම් එම බල තුන ලක්ෂ්‍යයකදී හමුවිය යුතු බව පෙන්වන්න.

A සහ B කේන්ද්‍ර සහිතව වෙනස් අරයන් ඇති එක එකෙහි බර W වන සුමට ඒකාකාර ගෝල දෙකක් ශීර්ෂය යටි අතට සිටින සේ අචලව තබා ඇති සුමට සෘජු වෘත්තාකාර කුහර කේතුවක් ඇතුළත සමතුලිතතාවේ පවතින්නේ එක් එක් ගෝලය එක් ලක්ෂ්‍යයක දී පමණක් කේතුව ස්පර්ශ කරන පරිදිය. කේතුවේ අඩ සිරස් කෝණය $\frac{\pi}{3}$ වන අතර එහි අක්ෂය සිරස සමඟ $\beta \left(< \frac{\pi}{2}\right)$ කෝණයක් සාදයි. AB රේඛාව උඩු සිරස සමඟ θ කෝණයක් සාදයි නම්,

$\theta = \tan^{-1}\left(\cot 2\beta - \frac{1}{2}\operatorname{cosec} 2\beta\right)$ බව පෙන්වන්න. කේතුවේ පැතිවල ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න.

[1997]

Scanned with CamScanner

71. දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියාකරන ඒකතල සමාන්තර නොවන බල තුනක් මගින් එම වස්තුව සමතුලිතතාවෙන් තබාගනියි නම් ඒ බල ලක්ෂ්‍යයකදී හමුවිය යුතු බව පෙන්වන්න.

W බරින් යුත් AB දණ්ඩක් C ගුරුත්ව කේන්ද්‍රයෙන් දණ්ඩ බෙදාලන්නේ පිළිවෙලින් a හා b දිග ඇති AC හා CB කොටස් දෙකටය. දණ්ඩ නිසලව සමතුලිතතාවෙන් තිබෙන්නේ B කෙළවර සුමට සිරස් බිත්තියකට හේත්තුකර B ට සිරස් ලෙස ඉහළින් බිත්තියේ පිහිටි D ලක්ෂ්‍යයකට ඈඳූ $l\ (> a + b)$ දිගින් යුත් ලුහු අවිතන්‍ය තන්තුවක් A කෙළවරකට සම්බන්ධ කිරීමෙනි.

(i) $\cos^2 A\hat{B}D = \dfrac{a^2}{b\,(b + 2a)}\left[\dfrac{l^2}{(a + b^2)} - 1\right]$ බව පෙන්වන්න.

(ii) තන්තුවේ ආතතිය සොයන්න. *[1996]*

72. දෘඪ වස්තුවක් මත ක්‍රියා කරන ඒකතල බල තුනක් මගින් එම වස්තුව සමතුලිතව තබා ගනියි නම් එක්කෝ ඒවා ලක්ෂ්‍යයකදී හමුවිය යුතු බව නැතහොත් සමාන්තර විය යුතු බව පෙන්වන්න.

බර W ද අරය r ද වූ ඒකාකාර සුමට අර්ධගෝලීය පාත්‍රයක් සුමට තිරස් මේසයක් මත නිසලව තිබෙයි. $2l$ දිගින් හා W බරින් යුත් ඒකාකාර දණ්ඩක් නිසලව පවතින්නේ එහි කොටසක් පාත්‍රය ඇතුළේ පිහිටන පරිදිය. තිරසට ගෝලයේ ආධාරකයේ ආනතිය $\dfrac{\pi}{6}$ වෙයි. තිරසට දණ්ඩේ ආනතිය $\theta\left(< \dfrac{\pi}{6}\right)$ ද පාත්‍රයේ ගැටියේ දී ප්‍රතික්‍රියාව R ද නම්, ජ්‍යාමිතික ලෙස හෝ අන් අයුරකින් හෝ

(i) $\theta = \left[\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{\pi}{2}\right]$ බවත්

(ii) $l = \dfrac{1}{2}\, r \sec\theta$ බවත්

(iii) $R = \dfrac{W}{(8 + \sqrt{3} - \sqrt{15})^{1/2}}$ බවත් සාධනය කරන්න. *[1995]*

73. දිග $2a$ ද බර W ද වූ ඒකාකාර සුමට AB දණ්ඩට එහි අචල A කෙළවර වටා සුචල ලෙස භැරෙන්නට පුළුවන. බර 2W වූ කුඩා සුමට C මුදුවකට දණ්ඩ දිගේ සර්පණය විය හැකිය. A ලක්ෂ්‍යය මෙන් එකම තිරස් මට්ටමේ පිහිටි D අචල ලක්ෂ්‍යයකට මුදුව ඈඳා ඇත්තේ $\dfrac{a}{4}$ දිගෙන් යුත් අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගිනි. තන්තුවත් දණ්ඩත් එකම සිරස් තලයක පිහිටයි.

$AD = \dfrac{a}{4}$ සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී දණ්ඩ හා මුදුව අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයා දණ්ඩ තිරස සමඟ $\dfrac{\pi}{3}$ කෝණයක් සාදන බව පෙන්වන්න. *[1994]*

Scanned with CamScanner

74. බර W ද අරය a ද වූ ඒකාකාර ඝන ගෝලයක් a දිගැති තන්තුවක් මඟින් අචල O ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා තිබෙයි. බර W ද, දිග $4a$ ද වූ ඒකාකාර දණ්ඩක එක් කෙළවරක් එම O ලක්ෂ්‍යටම නිදහසේ ඈඳා ඇත. දණ්ඩ ගෝලය හා ස්පර්ශ වෙමින් නිසලව තිබෙයි නම් තන්තුවේත් දණ්ඩේත් සිරසට ආනති එක එකක් $\frac{\pi}{12}$ ට සමාන වන බව පෙන්වන්න.

තන්තුවේ ආතතිය $\dfrac{W\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}$ බව ද පෙන්වා ගෝලයත් දණ්ඩත් අතර ප්‍රතික්‍රියාව සොයන්න. *[1993]*

75. බර W වූ AB දණ්ඩක් අරය r ද කේන්ද්‍රය C ද වූ සුමට අචල අර්ධ ගෝලාකාර පාත්‍රයක් තුළ සම්පූර්ණයෙන් ම පිහිටන පරිදි නිශ්චලව පිහිටා ඇත. AB දණ්ඩේ G ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය මඟින් දණ්ඩ a හා b කොටස් දෙකට බෙදා තිබෙයි. මෙහි $b > a$ ද $r > \sqrt{ab}$ ද වෙයි. සමතුලිතතා පිහිටීමේ දී තිරසට දණ්ඩේ ආනතිය θ නම්

$\sin\theta = \dfrac{b-a}{2\sqrt{r^2-ab}}$ බවත් $CG = \sqrt{r^2-ab}$ බවත් පෙන්වන්න.

පාත්‍රයත් දණ්ඩත් අතර ප්‍රතික්‍රියා සොයන්න. *[1992]*

76. දෘඪ වස්තුවක් සියල්ලම සමාන්තර නොවූ ක්‍රියා රේඛාවක් සහිත ඒකතල බල තුනක ක්‍රියාව යටතේ සමතුලිතතාවේ පවතී නම් එවිට ඒවායේ ක්‍රියා රේඛාව ඒක ලක්ෂ්‍යය විය යුතු බව පෙන්වන්න.

අරය $\sqrt{3}a$ වන සුමට අර්ධ ගෝලාකාර අචල පාත්‍රයක ගැට්ය උඩින් යන දිග $4a$ වන ඒකාකාර බර දණ්ඩක කෙළවරක් පාත්‍රයේ පෘෂ්ඨය ස්පර්ශ කරමින් නිසලව ඇත. පාත්‍රයේ ගැට්යේ තිරස්ව පිහිටයි නම්, තිරසට දණ්ඩේ ආනතිය රේඩියන් $\frac{\pi}{6}$ ක් බව පෙන්වන්න. *[1989]*

77. අරය a සහ බර W වූ ඒකාකාර ගෝලයක් තිරසට ආනතිය α වූ අචල සුමට තලයක නිශ්චලතාවයේ තබා ඇත්තේ ගෝල පෘෂ්ඨයේ ලක්ෂ්‍යයකට එක් කෙළවරක් ද තලයේ ලක්ෂ්‍යයකට අනිත් කෙළවර ද ඈඳූ දිග l වූ සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක ආධාරයෙනි. තලය සමඟ තන්තුව සාදන θ කෝණය සොයන්න. ගෝලය මත ක්‍රියා කරන බල සඳහා බල ත්‍රිකෝණයක් නිර්මාණය කරන්න. එමගින්,

(i) තන්තුවේ ආතතිය $\dfrac{W(l+a)\sin\alpha}{\sqrt{l^2+2al}}$ බව

(ii) තලයෙන් ප්‍රතික්‍රියාව $\dfrac{W\cos(\alpha-\theta)}{\cos\theta}$ බව පෙන්වන්න. *[2000]*

Scanned with CamScanner

78. බර W_1 වූ ඒකාකාර දණ්ඩක්, කොටසක් බර W_2 සහ අරය a වූ ඒකාකාර තුනී අර්ධ ගෝලාකාර පාත්‍රයක් ඇතුලත ද ඉතිරි කොටස පිටතද සිටින සේ නිශ්චලව තිබේ. පාත්‍රය ද සුමට තිරස් මේසයක් මත නිශ්චලව ඇත. පාත්‍රයේ ගුරුත්ව කේන්ද්‍රය එහි සමමිතික අරයේ මධ්‍ය ලක්ෂ්‍යයෙහි වේ. සමතුලිත පිහිටීමේදී දණ්ඩ තිරසට 30^0 කෝණයකින් ආනත වන අතර පාත්‍රයේ ගැටියෙහි තලය තිරසට θ^0 ($< 30^0$) කෝණයකින් ප්‍රතිවිරුද්ධ අතට ආනත වේ.

(i) $\cot\theta = \left(\sqrt{3} + \dfrac{W_2}{W_1}\right)$ බවත්,

(ii) පාත්‍රය තුළ වන දඬු කොටස එහි දිගෙන් $\dfrac{\sqrt{3}}{4} \; \dfrac{\cos(30^0 + \theta)}{\sin(30^0 - \theta)}$ භාවයක් බවත්,

(iii) දණ්ඩ හා පාත්‍රයේ ගැටිය අතර ප්‍රතික්‍රියාව $\dfrac{W_2}{\left(\sqrt{3}\dfrac{W_2}{W_1} + 2\right)}$ බවත් පෙන්වන්න.

[2001]

N

79. $2a$ විෂ්කම්භය වන සුමට අර්ධගෝලීය කබොලක් සුමට බිත්තියකට ස්පර්ශව ගැටිය තිරස්ව තබා ඇත. සිරසට 60^0 කින් ආනත ඒකකාර බර දණ්ඩක් එක් කෙළවරක් පාත්‍රය තුලද අනෙක බිත්තියට හේත්තු වනසේත් සමතුලිතව තබා ඇත. දණ්ඩේ දිග සොයන්න.

80. AB, BC යනු පිළිවෙලින් W, W' බර ඒකාකාර දඬු 2 කි. B හි දී ඒවා සුවල ලෙස එකට අසවුකොට ඇති අතර A කොන අචල A ලක්ෂ්‍යයකට සුවල ලෙස විවර්තනී කොට ඇත. ස්කන්ධය නොසැලකිය හැකි කුඩා සුමට මුදුවක් මගින්, A හරහා යන අචල තිරස් කම්බියක් මත C කොන චලනය වීමට සංශෝධනය කර ඇත. CAB, ACB කෝණ θ, ϕ වීම හා AC ට පහළින් B තිබීම සඳහා අවශ්‍ය පිහිටීමෙහි දඬු තබා ගැනීමට C හි දී යෙදිය යුතු තිරස් බලය $\dfrac{1}{2}\,(W + W')\cos\phi\cos\alpha\,\mathrm{cosec}\,(\theta + \phi)$ බව පෙන්වන්න.

81. අඩ සිරස් කෝණය 30^0 ක් වූ ද ආධාරකයේ අර්ධ විෂ්කම්භය a වන ඍජුවෘත්තාකාර ඝන කේතුවක බර W ය. කෙළවරක් කේතුවේ ආධාරකයේ කේන්ද්‍රයට ද අනෙක් කෙළවර ආනත තලයක් මත වූ ලක්ෂ්‍යයකට ද බඳින ලද සැහැල්ලු අවිතන්‍ය තන්තුවක් මගින් කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය ආනත තලය මත ගැටෙමින් කේතුව ආනත තලය මත සමතුලිතතාවේ තිබේ. තන්තුවේ දිග $a\sqrt{3}$ නම් ද තලයේ තිරසට ආනතිය α නම් ද තන්තුවේ ආතතිය $\dfrac{2\sqrt{3}\,W\sin\alpha}{3}$ බව පෙන්වන්න.

Scanned with CamScanner

කේතුවේ වක්‍ර පෘෂ්ඨය හා ආනත තලය අතර ප්‍රතික්‍රියාව R නම්, R වල අගය සොයා කේතුවේ අක්ෂය හා R වල ක්‍රියා රේඛාව කැපෙන ලක්ෂ්‍යයට කේතුවේ ශීර්ෂයේ සිට ඇති දුර

$$\frac{3\,(3\sqrt{3}\cos\alpha + 5\sin\alpha)\,a}{4\,(3\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha)}$$ බව පෙන්වන්න.

82. ඒකාකාර ද්‍රව්‍යයකින් සෑදි සෘජුවෘත්තාකාර කේතුවක අඩ සිරස් කෝණය α වේ. එහි උස h ය. කේතුවේ ශීර්ෂයට සම්බන්ධ කොට ඇති දිග l වූ තන්තුවකින් කේතුව සිරස් බිත්තියක වූ A ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා තිබේ. වෘත්තාකාර පාදය බිත්තියේ ගැටෙමින් අක්ෂය තිරස්ව පිහිටනසේ මෙම ඝන කේතුව සමතුලිතතාවයේ පවති. බිත්තිය සුමට නම් ද කේතුවේ පාදයේ කේන්ද්‍රය A ට සිරස් ලෙස පහළින් පිහිටා ඇත්නම්ද $l \leq h\sqrt{1 + \frac{16\tan^2\alpha}{9}}$ බව පෙන්වන්න.

83. අරය r සහ බර W වූ ගෝලයක් දිග 2r වූ තන්තුවක් මගින් A අචල ලක්ෂ්‍යයකින් එල්ලා ඇත. දිග $2a$ සහ බර W වූ ඒකාකාර දණ්ඩක කෙළවරක් A ට යා කර ඇති අතර එම ලක්ෂ්‍යය වටා දණ්ඩ හැරවිය හැක. දණ්ඩ ගෝලය ස්පර්ශ කරමින් නිශ්චලතාවෙහි පිහිටයි. සමතුලිත පිහිටීමේදී සිරසට තන්තුවේ ආනතිය α නම් $\tan\alpha = \frac{a}{(9r + 2\sqrt{2}a)}$ බව පෙන්වන්න.

තන්තුවේ ආතතියද සොයන්න.

Scanned with CamScanner